№11-дәріс

Векторларды скаляр көбейту.
Векторлардың векторлық көбейтіндісі, аралас көбейтіндісі және олардың геометрия мен механика салаларындағы қолданулары. Қасиеттері.

Векторларды скаляр көбейту

Анықтама 7. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\bar{a}\cdot\bar{b}$ деп, мынадай формула бойынша есептелетін шаманы айтамыз:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\alpha, \quad \alpha = \left(\bar{a}, \hat{\bar{b}}\right). \tag{1}$$

$b\cos\alpha = np_{\bar{a}}\bar{b}$ болғандықтан, онда $\bar{a}\bar{b} = a\, np_{\bar{a}}\bar{b}$

Скаляр көбейтудің қасиеттері:

1. Егер $\bar{a}\perp\bar{b}$, онда $\bar{a}\bar{b} = 0$.
2. $\bar{a}\cdot\bar{a} = a^2$
3. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
4. $\bar{a}\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c}$
5. $m\left(\bar{a}\bar{b}\right) = \left(m\bar{a}\right)\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\left(m\bar{b}\right)$.

Скаляр көбейтудің координаталық формадағы өрнектелуін табалық. $\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\bar{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ болсын. Онда

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1, \quad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$$

екенін ескерсек, $\bar{a}\cdot\bar{b} = \left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right)$. Немесе

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2}$$

Қ о р ы т ы н д ы. Векторларды скаляр көбейтудің көмегімен мыналар анықталады:

1. Екі вектордың перпендикулярлығы

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{3}$$

2. Векторлар арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{4}$$

3. Бір вектордың екінші векторға түсірілген проекциясы

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|} \tag{5}$$

Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Анықтама 1. $\bar{a}$ векторының $\bar{b}$ векторына векторлық көбейтіндісі деп төмендегі теңдіктерді қанағаттандыратын $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}\,;\,\bar{b}]$ векторын айтамыз:

1. 1. $|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin$, $\alpha = \left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$, $o \le \alpha \le \pi$,
2. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$
3. $\bar{c}$ векторының бағыты $\bar{c}$ векторының ұшынан қарағанда $\bar{a}$ векторынан $\bar{b}$ векторына дейінгі жақын ара қашықтық сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы болатындай $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларынан құралған жазықтыққа қарай бағытталған.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері

1. Егер $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, онда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$.
2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b})$.

Векторлық көбейтіндінің координаталық формадағы өрнектелуін табалық. $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ болсын. Онда

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}).$$

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}$, $\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}$ екенін ескерсек:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (6)$$

аламыз.

Е с к е р т у . Векторларды векторлық көбейтудің көмегімен мыналар анықталады:

1. Векторлардың коллинеарлығы

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \text{ немесе } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad \left(R_2 : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} \right), \qquad (7)$$

2. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданы

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| \qquad (8)$$

Мысал 1. ***a*** *= 2****i*** *+3****j****,* ***b*** *=* ***i*** *-4****j*** векторларынан құрылған параллелограммның ауданын тап. Мұндағы ***i*** *(1, 0),* ***j****(0, 1)*- бірлік векторлар және өзара перпендикуляр векторлар.

Шешуі:

a*b = (2**i** +3**j**)*(**i** -4**j**) = 2**i*** **i** +3**j*i** -8 **i** ***j**-12**j*j** = -3**i** ***j**-8**i** ***j** = -11**i** ***j** = **c**;
Sпар. = |**c**| = 11|**i*j**| = 11*1*1Sinπ /2 = 11.

Мысал 2. **a** = (0, 1, 0) және **b** = (2, -1, 3) векторлары берілген. Осы векторлардың векторлық көбейтіндісі мен векторлық көбейтіндісінен пайда болған вектордың ұзындығын тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{к} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{к} = \mathbf{c}$$

c(3, 0, -2), |**c**| = | **a** ***b**| = √9+0+4 = √13.

Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама 2. $\bar{a}, \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\bar{a} \times \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының скаляр көбейтіндісіне тең санды айтамыз, ол координаталық формада былай жазылады:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$ болғандықтан, аралас көбейтіндіні былай белгілейміз: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелипипедті қарастыралық . Онда $S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, ал $h = пр_{\bar{d}}\bar{c}$, мұндағы $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$, және $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| пр_{\bar{d}}\bar{c}$ болғандықтан $V = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right|$.

Е с к е р т у . Аралас көбейтіндінің көмегімен мыналар анықталады:

1. Үш вектордың компланарлығы

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

2. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелепипедтің көлемі

$$V = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right| \qquad (10)$$

Мысал 3. **a** = 2 **i** +5**j**+7**k**, **b** = **i** +**j**-**k**, **c** = **i** +2**j**+2**k** векторлары компланар екендігін көрсет.

Шешуі:

Егер **a**, **b**, **c** компланар болса, онда **a bc** = 0.

$$\mathbf{a\ bc} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4+14-5-7+4-10 = 0.$$

Ендеше, **a**, **b, c** векторлары компланар.

Мысал 4. Пирамиданың төбелері берілген: $A(1,\ 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 2)$, $D(3, 0, -2)$.

Табу керек:

1. BAC бұрышын.
2. ABC үшбұрышының ауданын.
3. Пирамида көлемін.

Шешуі:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ векторларын табалық:

$$\overline{AB} = (0-1,\ -1-2,\ 1-3) = (-1,-3,-2),\quad \overline{AC} = (1,3,-1),\quad \overline{AD} = (2,-2,-5)$$

1. $$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|} = \frac{-1\cdot 1+(-3)\cdot 3+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{-8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} = 9\bar{i} - 3\bar{j} = (9,-3,0)$$

2. $$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{81+9} = \frac{9\sqrt{10}}{2}.$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 24.$$

3. $$V_{пир.} = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$$